УДК 530.12; 531.51

СКРЫТЫЕ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА И КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА ПОТЕНЦИАЛОВ

Д.В. Гальцов[1], Д.И. Алферов[2]

1 *galtsov@physics.msu.ru, gdmv04@mail.ru*; Московский государственный университет, Казанский федеральный университет
2 - ; Московский государственный университет

Скрытыми симметриями называют глобальные симметрии, возникающие при размерной редукции уравнений Эйнштейна (и их обобщений), которые наследуются из группы диффеоморфизмов исходной теории. При редукции в трехмерие все негравитационные поля эффективно сводятся к скалярным, при этом широкие классы теорий описываются трехмерной гравитацией, имеющей в качестве источника систему скалярных полей, образующую нелинейную сигма-модель. Скрытые симметрии используются для получения новых решений уравнений Эйнштейна, зависящих от трех переменных, к такому классу сводятся практически все решения известные сейчас аналитически. Пространство "потенциалов" (target space) трехмерных сигма-моделей получаемых при редукции теорий допускающих решения с плоским трехмерных пространством (в моделях супергравитации это решения, насыщающие границу Богомольного, Прасада, Соммерфилда (БПС)) имеет метрику лоренцевой сигнатуры, и содержат изотропные геодезические. Они соответствуют, в частности, экстремальным черным дырам с вырожденным горизонтом событий, и образуют важный подкласс точных решений. Поскольку изотропные кривые остаются таковыми при конформных преобразованиях метрики, возникает вопрос о полезности возможных конформных симметрий пространства потенциалов для генерации БПС решений. Данная работа представляет попытку такого исследования. Показано, что некоторые известные сигма-модели, возникающие при размерной редукции, имеют конформно-плоское пространство потенциалов.

Ключевые слова: общая теория относительности, сигма-модели, супергравитация, уравнения Эйнштейна.

1. Введение

Интегрирование уравнений Эйнштейна в общем виде представляет собой сложную математическую задачу, и неудивительно, что в течение почти сорока лет после их открытия были известны лишь ограниченные классы решений, зависящих от одной переменной, такие как метрики Шварцшильда или Фридмана, или двух (решения Вейля). Хотя с точки зрения физики, эти решения предолжают оставаться одними из наиболее важных, (более подробное изложение истории вопроса можно найти в монографии [1]), создание систематических методов решения уравнений Эйнштейна началось лишь в 50-х годах прошлого века, и оно прежде всего было связано обнаружением их "скрытых симметрий". Одной из первых в этом направлении была работа Бухдала [2], в которой было показано, что из известных статических решений можно получать новые решения с помощью некоторого преобразования инверсии. Вскоре была открыта группа Элерса, названная по имени ее автора [3], одно из преобразований которой позволяет построить решение Тауба-НУТ из решения Шварцшильда. В работе Нейгебауэра-Крамера [4] были описаны скрытые симметрии стационарных уравнений Эйнштейна-Максвелла. В работах Эрнста [5] была дана элегантная формулировка уравнений Эйнштейна и Эйнштейна-Максвелла для стационарных полей при дополнительном предположении аксиальной симметрии. Ее развитие привело к обнаружению бесконечной группы симметрий в этом случае, получившей название группы Героча-Киннерсли-Читра [6], (подробнее см. в книге [1]). Эти симметрии приводят принципиальной возможности полного интегрирования уравнений Эйнштейна и Эйнштейна-Максвелла для конфигураций полей, обладающих двумерной абелевой группой изометрий, сводя их к некоторой двумерной теории, интегрируемой в смысле Лакса. При этом симметрии трехмерной сигма-модели (на которой мы и сосредоточимся далее) являются основой для дальнейшего вывода двумерных интегрируемых систем. Но они могут эфективно использоваться для генерации новых решений и непосредственно, оставаясь в рамках конфигураций, зависящих от трех переменных.

Конструктивные процедуры генерации возникают, если пространство потенциалов является симметрическим, реализуемым как фактор-пространство некоторой полупростой группы изометрий по ее подгруппе изотропии. В случае чистой четырехмерной гравитации без материи группа изометрий есть $SL(2,R)$, а природа фактор-пространства определяется знаком нормы вектора Киллинга соответствующего четырехмерного решения. Если последний времениподобен, то получаем фактор-пространство $SL(2,R)/SO(2)$ евклидовой сигнатуры, если пространственноподобен — то пространство $SL(2,R)/SO(1,1)$ с лоренцевой сигнатурой. В стационарной теории Эйнштейна-Максвелла пространство потенциалов есть $SU(1,2)/S(U(2)\times U(1))$. При этом часть исходных четырехмерных уравнений Эйнштейна описывается уравнениями сигма-модели (соответствующие переменные как правило связаны с компонентыми четырехмерной метрики неточечным образом через решения некоторого линейного дифференциального уравнения), а оставшиеся снова требуют решения уравнений Эйнштейна, но уже трехмерных и с материальным источником.

Дальнейщие исследования существенно расширили круг четырехмерных теорий самогравитирующих материальных полей, в которых решения, обладающие (хотя бы одним) неизотропным векторным полем Киллинга, имеют сигма-модельное описание с симметрическим пространством потенциалов (Калуца-Клейн [7], Эйнштейн-Максвелл-дилатон [8], Эйнштейн-Максвелл-дилатон-аксион с одним [9, 10, 11] или несколькими [12, 13, 14] векторными полями), а также распространили представление о скрытых симметриях на многомерные гравитационные теории [15], возникающие в супергравитации и теории струн. Более подробное обсуждение этого развития теории можно найти в обзорах [16].

2. Сигма-модель для стационарной теории Эйнштейна-Максвелла с дилатоном

В этой работе мы рассмотрим теорию Эйнштейна-Максвелла с дилатоном, которая представляет собой типичную модель в струнной гравитации, содержащую в виде частных случаев вакуумную гравитацию, теорию Эйнштейна-Максвелла, и теорию Эйнштейна со скалярным полем. Действие теории имеет вид

$$\mathscr{L} = \frac{1}{16\pi}\int \sqrt{-g}\left(-R + 2(\partial\phi)^2 - e^{-2\alpha\phi}F^2\right)d^4x,$$

где ϕ действительное скалярное поле (дилатон), $F = dA$ - 2-форма Максвелла, α - константа связи дилатона.

Будем рассматривать стационарный случай, выбирая параметризацию метрики

$$ds^2 = f(dt - \omega_i dx^i)^2 - f^{-1}h_{ij}dx^i dx^j,$$

где функция f, 1-форма $\omega = \omega_{\ i} dx^i$ и трехмерная метрика h_{ij} зависят только от пространственных координат $x^i, i = 1,2,3$. Действие в таком случае можно записать используя только скалярные поля, которые при этом имеют действие нелинейной сигма модели [8]. (Заметим, что это свойство теряется при добавлении космологической постоянной и/или потенциала дилатона.) Легко показать, что поле Максвелла полностью описывается двумя действительными функциями v и a, зависящими от x^i таким же образом, как и в случае “чистого” поля Эйнштейна-Максвелла [17]. Действительно уравнения Максвелла будут выглядеть:

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}e^{-2\alpha\phi}F^{\mu\nu}) = 0, \tag{1}$$

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}\tilde{F}^{\mu\nu}) = 0, \tag{2}$$

где $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}E^{\mu\nu\lambda\tau}F_{\lambda\tau}$, $E^{\mu\nu\lambda\tau} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\tau}/\sqrt{-g}$. С преположением о стационарности решений, компонента $\mu = i$ уравнения (2) разрешается подстановкой

$$F_{i0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_i v, \tag{3}$$

а компонента $\mu = i$ уравнения (1) — подстановкой

$$F^{ij} = \frac{f}{\sqrt{2h}}e^{2\alpha\phi}\epsilon^{ijk}\partial_k a. \tag{4}$$

Величины v и a играют роль элекрического и магнитного потенциалов соответственно. Оставшиеся компоненты тензора $F^{\mu\nu}$ можно выразить в терминах полей v и a используя соотношения[17]

$$F^{i0} = F^{ij}\omega_j - h^{ij}F_{j0}, \tag{5}$$

где h^{ij} трехмерная метрика обратная к h_{ij}. Ещё одно полезное соотношение имеет вид

$$F_{ij} = f^{-2}h_{ik}h_{jl}F^{kl} + 2F_{0[i}\omega_{j]}. \tag{6}$$

Следуя работе [17], можно ввести форму дуальную к 2-форме вращений $d\omega$:

$$\tau^i = -f^2\frac{\epsilon^{ijk}}{\sqrt{h}}\partial_j\omega_k, \tag{7}$$

которая остается инвариантной при преобразованиях времени $t \to t + T(x^i)$. Далее будем полагать, что индексы всех трехмерных величин опускаются и поднимаются при помощи трехмерной метрики $h_i j$, а для четырехмерных тензоров будем использовать $g_{\mu\nu}$. Теперь распишем компоненты тензора Риччи $R_{\mu\nu}$ (определенного как $R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\alpha} - ...$)

$$R_{00} = \frac{1}{2}\left(f\Delta f - (\nabla f)^2 + \tau^2\right), \tag{8}$$

$$R^i_0 = \frac{f}{2\sqrt{h}}\epsilon^{ijk}\tau_{k,j}, \tag{9}$$

$$R^{ij} = f^2\mathscr{R}^{ij} - \frac{1}{2}\left[(\nabla^i f)(\nabla^j f) + \tau^i\tau^j - h^{ij}\left(f\Delta f - (\nabla f)^2 + \tau^2\right)\right], \tag{10}$$

где $\mathscr{R}^{ij}$ тензор Риччи в трехмерии, ∇_i трехмерная ковариантная производная, согласованная с метрикой h_{ij} и $\Delta = h^{ij}\nabla_i\nabla^2_j$.

Соответсвующие компоненты тензора энергии-импульса будут равны:

$$16\pi(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T) = f\left((\nabla v)^2 e^{-2\alpha\phi} + (\nabla a)^2 e^{2\alpha\phi}\right), \tag{11}$$

$$8\pi T^i_0 = \frac{f}{\sqrt{h}}\epsilon^{ijk}(\nabla_j v)(\nabla_k a), \tag{12}$$

$$8\pi(T^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}T) = -f\left(e^{-2\alpha\phi}(\nabla^i v)(\nabla^j v) + e^{2\alpha\phi}(\nabla^i a)(\nabla^j v)\right),$$

$$+\frac{fh^{ij}}{2}\left(e^{-2\alpha\phi}(\nabla v)^2 + e^{2\alpha\phi}(\nabla a)^2\right) + 2f^2(\nabla^i\phi)(\nabla^j\phi). \tag{13}$$

Примечательно, что дилатон не влияет на смешанные компоненты уравнений Эйнштейна. Таким образом, сравнивая (9) и (12), получаем

$$\tau_i = w_i + \nabla_i\chi, \tag{14}$$

где

$$w_i = v\nabla_i a - a\nabla_i v, \tag{15}$$

и χ - твист-потенциал, определенный с точностью до аддитивной константы. В терминах χ and $\mathbf{w}$, компонента 00 уравнений Эйшнтейна примет вид

$$f\Delta f - (\nabla f)^2 = f\left((\nabla v)^2 e^{-2\alpha\phi} + (\nabla a)^2 e^{2\alpha\phi}\right) - (\nabla\chi + \mathbf{w})^2. \tag{16}$$

Дивергенция от (14) вместе с (7) приводит к уравнению на χ:

$$f\Delta\chi - 2\nabla f(\nabla\chi + \mathbf{w}) + f(v\Delta a - a\Delta v) = 0. \tag{17}$$

Чтобы получить уравнения второго порядка для v и a нужно рассмотреть $\mu = 0$ компоненты уравнений (1), (2). Воспользовавшись выражениями (5), (6), (7) и (14) получаем:

$$f^2\nabla(f^{-1}e^{-2\alpha\phi}\nabla v) + (\nabla\chi + \mathbf{w})\nabla a = 0, \tag{18}$$

$$f^2\nabla(f^{-1}e^{2\alpha\phi}\nabla a) - (\nabla\chi + \mathbf{w})\nabla v = 0. \tag{19}$$

Окончательно уравнение для дилатона в теминах тех же переменных примет вид

$$2f\Delta\phi = \alpha\left(e^{-2\alpha\phi}(\nabla v)^2 - e^{2\alpha\phi}(\nabla a)^2\right). \tag{20}$$

Совокупность уравнений (16)-(20) дополняется оставшимися ij компонентами четырехмерного уравнения Эйнштейна. Сопоставляя (10) и (13) используя (14) получаем трехмерный тензор Риччи

$$\mathscr{R}_{ij} = \frac{1}{2f^2}\left[(\nabla_i f)(\nabla_j f) + (\nabla_i \chi + w_i)(\nabla_j \chi + w_j)\right] +$$

$$+2(\nabla_i \phi)(\nabla_j \phi) - f^{-1}\left[e^{-2\alpha\phi}(\nabla_i v)(\nabla_j v) + e^{2\alpha\phi}(\nabla_i a)(\nabla_j a)\right]. \qquad (21)$$

Система (16)-(21) полностью описывает стационарную систему Эйнштейна-Максвелла с дилатоном для произвольной константы связи α. Её можно представить как трехмерную систему Эйнштейна с материей с пятью действительными скалярными полями, называмыми обычно "потенциалами":

$$\varphi^a = (f, \chi, v, a, \phi), \quad a = 1, \ldots, 5, \qquad (22)$$

Выведенные выше трехмерные уравнения можно получить из следующуего действия:

$$S_\sigma = \int \left(\mathscr{R} - g_{ab}(\varphi)\partial_i \varphi^a \partial_j \varphi^b\right) h^{ij}\sqrt{h}\, d^3x, \qquad (23)$$

где $\mathscr{R} = \mathscr{R}^i_i$, и $g_{ab}(\varphi^c)$ метрика пространства потенциалов

$$g_{ab}d\varphi^a d\varphi^b = \frac{1}{2f^2}\left(df^2 + (d\chi + v da - a dv)^2\right) -$$

$$-\frac{1}{f}(e^{-2\alpha\phi}dv^2 + e^{2\alpha\phi}da^2) + 2d\phi^2. \qquad (24)$$

При $\alpha = 0$ и $\phi = \text{const}$ эта метрика сводится к метрике, полученной в работе [4] для системы Эйнштейна-Максвелла. Стоит отметить что уравнение для дилатона (20) при $\alpha \neq 0$, $\phi = \text{const}$ дает ограничение на поле Максвелла. Именно, стационарная система с дилатоном имеет решение $\phi = \text{const}$ только если $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F^2 = 0$. Таким образом система Эйнштейна-Максвелла явяется частным случаем системы с дилатоном лишь при $\alpha = 0$, когда скалярное поле взаимодействует только с гравитацией и может быть положено равным нулю.

Уравнение движения для потенциалов φ^A, получаемое из вариации трехмерного действия, имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\partial_i\left(\sqrt{h}h^{ij}g_{ab}\partial_j\varphi^b\right) = 0. \qquad (25)$$

В работе [4] было замечено, что если все потенциалы φ^A зависят от x^i через единственную функцию $\sigma(x^i)$(обобщение на случай нескольких функций иногда возможно [11]),

$$\varphi^a = \varphi^a[\sigma(x^i)],$$

тогда из уравнений движения (25) следует что эта функция должен быть гармонической в пространстве с метрикой h_{ij}:

$$\Delta\sigma = 0, \qquad \Delta = h^{ij}\nabla_i\nabla_j. \qquad (26)$$

Тогда уравнения движения сводятся к уравнению геодезических в пространстве потенциалов

$$\frac{d^2\varphi^a}{d\sigma^2} = \Gamma^a_{bc}\frac{d\varphi^b}{d\sigma}\frac{d\varphi^c}{d\sigma}, \tag{27}$$

а уравнения Эйнштейна принимают вид

$$\mathscr{R}_{ij} = g_{ab}\frac{d\varphi^a}{d\sigma}\frac{d\varphi^b}{d\sigma}\nabla_i\sigma\nabla_j\sigma\,. \tag{28}$$

Особый класс представляют изотропные геодезические,

$$g_{ab}\frac{d\varphi^a}{d\sigma}\frac{d\varphi^b}{d\sigma} = 0\,,$$

тогда можно заметить, что правая часть уравнений Эйнштейна обращается в нуль. Мы получаем что метрика h_{ij} является Риччи-плоской, а трехмерные Риччплоские просранства являются вообще плоскими. В ряде теорий было замечено, что нулевые геодезические описывают экстремальные черные дыры, удовлетворяющие условию Богомольного на соответсвующие заряды. В данном случае зарядами является масса M, НУТ -заряд N (магнитная масса), дилатонный заряд D, электрический Q, и магнитный P заряды, а условие Богомольного имеет вид:

$$M^2 + N^2 + D^2 = Q^2 + P^2\,.$$

То, что пространство получается плоским, соответствует ожиданию, что заряды взаимно балансируют силы притяжения/отталкивания.

3. Векторы Киллинга

Векторные поля Киллинга K задаются уравнением:

$$\mathscr{L}_K g_{ab} = 0\,,$$

где $\mathscr{L}$ - производная Ли. Для метрики пространства потенциалов с константой связи дилатона $\alpha \neq 0,\ \sqrt{3}$ существуют пять векторов Киллинга:

$$\begin{aligned} K_s &= 2f\partial_f + v\partial_v + a\partial_a + 2\chi\partial_\chi\,, \\ K_\phi &= \frac{1}{\alpha}\partial_\phi + v\partial_v - a\partial_a\,, \\ K_a &= \partial_a + v\partial_\chi\,, \\ K_v &= \partial_v - a\partial_\chi\,, \\ K_\chi &= \partial_\chi\,, \end{aligned} \tag{29}$$

образующих разрешимую алгебру [8]. Очевидно, что при преобразованиях потенциалов вдоль векторов Киллинга не изменяются уравнения геодезических и уравнения Эйнштейна, это означает, что можно использовать векторы Киллинга для построения конечных преобразований в пространстве решений [8]. Три из них отвечают калибровочным преобразованиям, а два оставшихся - дилатонному сдвигу с соответсвующим преобразованием электромагнитных полей.

Симметрии, связанные с векторами Киллинга, также помогают упростить уравнения геодезических. Как известно, каждому вектор Киллига соответсвует величина, сохраняющаяся на геодезических. Если K_A - поле Киллинга, тогда на геодезических сохраняется величина

$$I_K = K_a \frac{d\varphi^a}{d\sigma},$$

являющаяся интегралом движения уравнений (27). Эти интегралы имеют вид :

$$h = \frac{1}{2f^2}\left(\dot{\chi} + v\dot{a} - a\dot{v}\right),$$

$$q = \frac{e^{-2\alpha\phi}\,\dot{v}}{f} + 2ha,$$

$$p = \frac{e^{2\alpha\phi}\,\dot{a}}{f} - 2hv,$$

$$d = \frac{2\dot{\phi}}{\alpha} - 2hva - qv + pa,$$

$$s = \frac{\dot{f}}{f} + 2h\chi - qv - pa,$$

где $\dot{} = d/d\sigma$. Они связаны с физическими зарядами:

$$h = N, \qquad s = 2M, \qquad d = \frac{2D}{\alpha}, \qquad q = \sqrt{2}Q, \qquad p = \sqrt{2}P.$$

Особый интерес представляют изотропные геодезические, удовлетворяющие уравнению

$$g_{ab}\frac{d\varphi^a}{d\sigma}\frac{d\varphi^b}{d\sigma} = 0,$$

которые обращают в нуль правую часть уравнений Эйнштейна (28):

$$\mathscr{R}_{ij} = 0$$

превращая метрику h_{ij} в плоскую. Изучим теперь конформные преобразования пространства потенциалов.

4. Конформные преобразования

Рассмотрим преобразование потенциалов при котором метрика пространства потенциалов домножается на произвольную функцию Ω:

$$\hat{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab} \tag{30}$$

Для общности будем считать $a = 1,\ldots,n$. Такое преобразование будем называть конформным. Конформно плоским пространством называется такое пространство, которое можно при помощи конформного преобразования привести к плоскому. Определим некоторые величины, которое нам пригодятся для последующего анализа:

- Тензор Вейля

$$W_{abcd} = R_{abcd} - \frac{2}{n-2}\left(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}\right) + \frac{2}{(n-1)(n-2)}Rg_{a[c}g_{d]b}, \tag{31}$$

где R_{abcd} - тензор Римана, R_{ab} - тензор Риччи, R - скалярная кривизна пространства потенциалов. Нетривиален тензор Вейля только в пространствах размерности больше трех, при $n < 4$ он тождественно равен нулю. Тензор Вейля это бесследовая часть тензора Римана, он наследует его алгебраические свойства. Примечательно что тензор Вейля валентности (1,3) не изменяется при конформных преобразованиях

$$\hat{W}^a_{bcd} = W^a_{bcd}. \tag{32}$$

Обращение тензора Вейля в нуль в пространстве размерности $n \geq 4$ является необходимым и достаточным критерием того что пространство конформно плоское.

- Тензор Коттона (здесь и далее символом ∇_a обозначена комаринтная производная, согласованная с метрикой пространства потенциалов g_{ab})

$$C_{abc} = \nabla_c R_{ab} - \nabla_b R_{ac} + \frac{1}{2(n-1)}\left(\nabla_b R g_{ac} - \nabla_c R g_{ab}\right). \tag{33}$$

Тензор Коттона фактически является дивергенцией тензора Вейля. В пространствах размерности $n < 3$ тождественно равен нулю. При конформных преобразованиях

$$\hat{C}_{abc} = C_{abc} + (n-2)\partial_d \ln(\Omega) W_{abc}^{\ \ \ \ d}. \tag{34}$$

В пространстве размерности $n = 3$ обращение тензора Коттона в нуль является необходимым и достаточным условием того что пространство конформно плоское.

- Тензор Схоутена

$$P_{ab} = \frac{1}{n-2}\left(R_{ab} - \frac{R}{2(n-1)}g_{ab}\right), \tag{35}$$

- Тензор Баха

$$B_{ab} = P_{cd}W_{a\ b}^{\ c\ d} + \nabla^c\nabla_a P_{bc} - \nabla^c\nabla_c P_{ab}. \tag{36}$$

В пространстве размерности $n = 4$ тензор Баха является конформно инвариантным. Также он алгебраически независим от тензора Вейля.

Важно отметить, что, хотя тензор Риччи и инвариантен относительно растяжений метрики на постоянную величину, он не является инвариантной величиной при общих конформных преобразованиях.

Вообще говоря конформные преобразования не сохраняют вида уравнений движения (27),(28) теории. Для того чтобы сохранить уравнение геодезических необходимо чтобы символы Кристоффеля не изменялись при преобразовании. Между тем символы Кристоффеля изменяются следующим образом:

$$\hat{\Gamma}^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} + \delta^a_b\partial_c \ln(\Omega) + \delta^a_c\partial_b \ln(\Omega) - G_{bc}\partial^a \ln(\Omega).$$

Отсюда видно, что для того, чтобы в общем случае конформное преобразование оставляло неизменными символы Кристоффеля, конформный фактор Ω должен быть постоянной величиной, то есть годятся только аффиные преобразования. Однако особый интерес представляет случай нулевых геодезических. При конформных преобразованиях нулевые геодезические $\varphi^a(\sigma)$ в метрике g_{ab} останутся нулевыми геодезическими в метрике $\hat{g}_{ab}$. Уравнение геодезических преобразуются следующим образом:

$$\frac{d^2\varphi^a}{d\sigma^2} - \Gamma^a_{bc}\frac{d\varphi^b}{d\sigma}\frac{d\varphi^c}{d\sigma} = \frac{d^2\varphi^a}{d\sigma^2} - \hat{\Gamma}^a_{bc}\frac{d\varphi^b}{d\sigma}\frac{d\varphi^c}{d\sigma} + 2\frac{d\varphi^a}{d\sigma}\frac{d\ln(\Omega)}{d\sigma} = 0\,,$$

откуда видно, что параметр σ перестает быть аффиным в новой метрике, но переход к новому параметру μ удовлетворяющему

$$d\mu/d\sigma = \Omega^{-2} \tag{37}$$

сведет новое уравнение к уравнению геодезических с новым параметром к привычному виду.

5. Преобразование Боннора

Известно преобразование Боннора [18], связывающее афинно два подпространства пространства потенциалов:

$$dl_1^2 = \frac{df^2 + d\chi^2}{2f^2} + 2d\phi^2\,, \tag{38}$$

$$dl_2^2 = \frac{df^2}{2f^2} - \frac{e^{-2\alpha\phi}a}{f} + 2d\phi^2$$

следующим образом

$$\begin{aligned} f_1^2 &= f_2 e^{-2\alpha\phi_2}\,,\\ \chi_1 &= i\left(\frac{1+\alpha^2}{2}\right)^{1/2} a_2\,,\\ \phi_1 &= \frac{1}{2}\left(\phi_2 + \frac{\alpha}{2}\ln f_2\right). \end{aligned} \tag{39}$$

При этом преобразовании

$$dl_1^2 = \left(\frac{1+\alpha^2}{4}\right) dl_2^2\,.$$

Уравнения геодезических (27) очевидно не изменяются, но в случае ненулевых геодезических необходимо будет изменить метрику h_{ij} для того чтобы удовлетворить уравнениям Эйнштейна (28). Например, в случае аксиальной симметрии h_{ij} можно представить в виде:

$$h_{ij} = e^{2\gamma(\rho,z)}\left(d\rho^2 + dz^2\right) + \rho^2 d\phi^2\,.$$

Тогда преобразование

$$\gamma' = \lambda\gamma$$

изменит тензор Риччи

$$\mathcal{R}'_{ij} = \lambda \mathcal{R}_{ij}\,.$$

Как можно видеть, при таком совместном преобразовании метрики пространства потенциалов и метрики h_{ij} уравнения движения останутся неизменными.

6. Алгебра конформных векторов Киллинга

Существует несколько расширений векторов Киллинга. Одним из них являются конформные векторы Киллинга K, которые являются решением уравнения

$$\mathscr{L}_K g_{ab} = \lambda g_{ab}\,, \tag{40}$$

где $\lambda = \frac{1}{n}\nabla_a K^a$ - величина пропорциональная дивергенции конформного вектора Киллинга. Можно записать это уравнение в эквивалентном виде:

$$\nabla_{(a}K_{b)} = 2\lambda G_{ab}\,.$$

Конформные векторы тоже образуют алгебру, и очевидно, что векторы Киллинга, обладая нулевой дивергенцией, являются подалгеброй в этой алгебре. Рассмотрим подпространство пространства потенциалов включающее в себя потенциалы f, χ, ϕ:

$$ds^2 = \frac{df^2 + d\chi^2}{2f^2} + 2d\phi^2\,, \tag{41}$$

и найдем конформные векторы Киллинга, удовлетворяющие уравнению (40). Решение этого уравнения содержит 10 параметров, выберем в качестве базисных конформных векторов Киллинга следующие:

$$\begin{gathered}
K_1 = -\sin(2\phi)\partial_f - \frac{\cos(2\phi)}{2f}\partial_\phi\,,\\
K_2 = -\sin(2\phi)\left(\chi^2 - f^2\right)\partial_f - \frac{\cos(2\phi)\left(\chi^2+f^2\right)}{2f}\partial_\phi + 2\chi f\sin(2\phi)\partial_\chi\,,\\
K_3 = -\cos(2\phi)\left(\chi^2 - f^2\right)\partial_f + \frac{\sin(2\phi)\left(\chi^2+f^2\right)}{2f}\partial_\phi + 2\chi f\cos(2\phi)\partial_\chi\,,\\
K_4 = -2\sin(2\phi)\chi\partial_f - \frac{\cos(2\phi)\chi}{f}\partial_\phi + 2f\sin(2\phi)\partial_\chi\,, \qquad (42)\\
K_5 = -2\cos(2\phi)\chi\partial_f + \frac{\sin(2\phi)\chi}{f}\partial_\phi + 2f\cos(2\phi)\partial_\chi\,,\\
K_6 = \cos(2\phi)\partial_f - \frac{\sin(2\phi)}{2f}\partial_\phi, \qquad K_7 = 2\chi f\partial_f + \left(\chi^2 - f^2\right)\partial_\chi\,,\\
K_8 = 2f\partial_f + 2\chi\partial_\chi\,,\\
K_9 = 2\partial_\chi \qquad K_{10} = \frac{1}{2}\partial_\phi\,.
\end{gathered}$$

Им соответствуют конформные факторы:

$$\lambda_1 = \frac{2\sin(2\phi)}{f},$$

$$\lambda_2 = \frac{2\sin(2\phi)\left(\chi^2+f^2\right)}{f},$$

$$\lambda_3 = \frac{2\cos(2\phi)\left(\chi^2+f^2\right)}{f},$$

$$\lambda_4 = \frac{4\sin(2\phi)\chi}{f},$$

$$\lambda_5 = \frac{4\cos(2\phi)\chi}{f},$$

$$\lambda_6 = -\frac{2\cos(2\phi)}{f},$$

$$\lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_{10} = 0,$$

откуда ясно, что K_7, K_8, K_9, K_{10} являются обычными векторами Киллинга.

Все десять векторов образуют алгебру со следующими коммутационными соотношениями:

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}
K_1	0	$-K_8$	$-2K_{10}$	$-K_9$	0	0	K_4	$2K_1$	0	K_6
K_2	K_8	0	0	$2K_7$	0	$2K_{10}$	0	$-2K_2$	$-2K_4$	$-K_3$
K_3	$2K_{10}$	0	0	0	$2K_7$	$-K_8$	0	$-2K_3$	$-2K_5$	K_2
K_4	K_9	$-2K_7$	0	0	$4K_{10}$	0	$2K_2$	0	$-4K_1$	$-K_5$
K_5	0	0	$-2K_7$	$-4K_{10}$	0	$-K_9$	$2K_3$	0	$4K_6$	K_4
K_6	0	$-2K_{10}$	K_8	0	K_9	0	$-K_5$	$2K_6$	0	$-K_1$
K_7	$-K_4$	0	0	$-2K_2$	$-2K_3$	K_5	0	$-2K_7$	$-2K_8$	0
K_8	$-2K_1$	$2K_2$	$2K_3$	0	0	$-2K_6$	$2K_7$	0	$-2K_9$	0
K_9	0	$2K_4$	$2K_5$	$4K_1$	$-4K_6$	0	$2K_8$	$2K_9$	0	0
K_{10}	$-K_6$	K_3	$-K_2$	K_5	$-K_4$	K_1	0	0	0	0

Подалгебра Картана образована векторами K_4, K_8. Построив матрицу Картана мы сможем убедится что имеем дело с алгеброй B_2. Она соотвествует алгебре $sp(2, C)$ или $so(5, C)$. Нас интересует вещественная алгебра, поэтому рассмотрим вещественные формы: $sp(m, n)(m + n = 2)$ и $so(p, q)(p + q = 5)$.

Форма Киллинга B_{ij} имеет следующие ненулевые компоненты:

$$B_{1,2} = 12, \qquad B_{3,6} = -12, \qquad B_{4,4} = -24, \qquad B_{5,5} = -24,$$

$$B_{7,9} = -24, \qquad B_{8,8} = 24, \qquad B_{10,10} = -6.$$

Приведя форму к диагональному виду можно убедится что она невырождена, и имеет четыре положительных компоненты и шесть отрицательных. Максимальная компактная подалгебра - подпространство где форма Киллинга B_{ij} отрицательно определена. Такой подалгеброй будет:

$$\left[K_1 - K_2, \qquad K_3 + K_6, \qquad K_4, \qquad K_5, \qquad K_7 + \frac{1}{2}K_9, \qquad K_{10}\right]$$

Проверка показывает что это алгебра $so(4)$, тогда мы имеем дело с $so(4,1)$. В качестве общего матричного элемента алгебры $K = K_a q_a$ можно выбрать

$$K = \begin{pmatrix} 2q_8 & 0 & -q_2 & q_7 & -q_3 \\ 0 & -2q_8 & 2q_1 & 4q_9 & -2q_6 \\ -2q_1 & q_2 & 0 & -2q_4 & -q_{10} \\ -4q_9 & -q_7 & q_4 & 0 & 2q_5 \\ 2q_6 & q_3 & q_{10} & -2q_5 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Интегралы движения

Известно, что векторы Киллинга дают интегралы движения для геодезических, подобным свойством обладают и конформные векторы с ограничением применимости только для нулевых геодезических. Конформные векторы Киллинга будут давать сохраняющиеся величины на нулевых геодезических:

$$Q = K_a \dot{\varphi}^a .$$

Действительно:

$$\frac{d}{d\sigma}Q = \frac{d}{d\sigma}\left(K_a \dot{\varphi}^a\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla_b K_a + \nabla_a K_b\right)\dot{\varphi}^a \dot{\varphi}^b = \lambda(\varphi) G_{ab} \dot{\varphi}^a \dot{\varphi}^b = 0 .$$

Выпишем интегралы движения для полученных конформных векторов Киллинга. Величины, сохраняющиеся на любых геодезических этого сектора:

$$Q_7 = \frac{\chi^2 - f^2}{2f^2}\dot{\chi} + \frac{\chi}{f}\dot{f} ,$$

$$Q_8 = \frac{1}{f}\dot{f} + \frac{\chi}{f^2}\dot{\chi} ,$$

$$Q_9 = \frac{1}{f^2}\dot{\chi} ,$$

$$Q_{10} = \dot{\phi} .$$

Величины, которые сохраняются только на нулевых геодезических:

$$Q_1 = \frac{\sin(2\phi)}{2f^2}\dot{f} + \frac{\cos(2\phi)}{f}\dot{\phi} ,$$

$$Q_2 = \frac{\sin(2\phi)(\chi^2 - f^2)}{2f^2}\dot{f} + \frac{\cos(2\phi)(\chi^2 + f^2)}{f}\dot{\phi} + \frac{\sin(2\phi)}{f}\dot{\chi} ,$$

$$Q_3 = -\frac{\cos(2\phi)(\chi^2 - f^2)}{2f^2}\dot{f} + \frac{\sin(2\phi)(\chi^2 + f^2)}{f}\dot{\phi} + \frac{\cos(2\phi)\chi}{f}\dot{\chi} ,$$

$$Q_4 = \frac{\sin(2\phi)\chi}{f^2}\dot{f} + \frac{2\cos(2\phi)\chi}{f}\dot{\phi} - \frac{\sin(2\phi)}{f}\dot{\chi},$$
$$Q_5 = -\frac{\cos(2\phi)\chi}{f}\dot{f} + \frac{2\sin(2\phi)\chi}{f}\dot{\phi} + \frac{\cos(2\phi)}{f}\dot{\chi},$$
$$Q_6 = \frac{\cos(2\phi)}{2f^2}\dot{f} - \frac{\sin(2\phi)}{f}\dot{\phi}.$$

8. Конформно плоские пространства

Конформно плоским пространством называется такое пространство метрику котрого можно свести к плоской при помощи конформного преобразования:

$$g_{ij}\frac{dx^i}{dy^a}\frac{dx^j}{dy^b}dy^a dy^b = \Omega^2\eta_{ab}dy^a dy^b,$$

где в нашем случае $\eta_{ab} = diag(1,1,1)$, в более общем рассмотрении стоит рассматривать метрики произвольных сигнатур.

Известно что если пространство размерности n имеет $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ конформных векторов Киллинга, то это пространство конформно плоское. Рассматриваемое подпространство размерности 3 имеет $\frac{(3+1)\cdot(3+2)}{2} = 10$ конформных векторов Киллинга и следовательно является конформно плоским. Ещё можно убедится в этом проверив что тензор Коттона C_{ijk} обращается в нуль. Это является необходимым и достаточным условием того что пространство размерности $n = 3$ конформно плоское [1]. Также конформно плоским подпространствами пространства потенциалов являются:

$$dl^2 = \frac{df^2}{2f^2} - \frac{e^{-2\alpha\phi}a}{f} + 2d\phi^2,$$
$$dl^2 = \frac{df^2}{2f^2} - \frac{e^{2\alpha\phi}v}{f} + 2d\phi^2.$$

Этого следовало ожидать так как они тесно связаны преобразованием Боннора с исследуемой метрикой (38). Однако так как эти подпространства имееют разную сигнатуру стоит ожидать что алгебра изменится на $so(3,2)$. Используя преобразования Боннора (39) можно подействовать и на решения из этих секторов применив какоелибо из преобразований (48), (47),(45),(46) и сделав обратное преобразование Боннора. Для пространств большей размерности $(n > 3)$ обращения тензора Коттона в нуль недостаточно, небходимо обращение в нуль тензора Вейля.

Для того чтобы воспользоваться конечными преобразованиями из конформной группы нам необходимо найти соответсвующее координатное преобразование, оно сразу идентифицируется после того как мы вынесем конформный фактор $1/(2f^2)$ из метрики (41). Преобразование похоже на переход от циллиндрических координат к декартовым:

$$x = f\cos(2\phi),$$
$$y = f\sin(2\phi), \tag{43}$$
$$z = \chi.$$

Запишем также обратное преобразование:

$$f = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\,, \tag{44}$$

$$\chi = z\,.$$

Видно, что величина f ассоциируется с радиусом $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 2ϕ с углом и χ с координатой z цилиндрических координат. Так как конформный фактор зависит только от f, можно сказать, что любые преобразования не преобразующие r, или преобразующие линейно $r' = cr$, могут действовать не только на нулевые геодезические, а на произвольные. Такими преобразованиями будут сдвиги по оси z.

9. Конформная группа

Группа конформных преобразований плоского пространства хорошо известна, она включает в себя в качестве подгрупп группу вращений, группу трансляций и группу растяжений пространства. Единственными преобразованиями, которые обладают непостоянными конформными факторами в этой группе являются специальные конформные преобразования (SCT), которые действуют последовательно применяя: инверсию относительно сферы единичного радиуса, трансляцию на вектор и снова инверсию. В таблице указаны все конечные конформные преобразования плоского пространства и их генераторы

	Преобразования	Генераторы
Трансляции	$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$	$P_{\mu} = -i\partial_{\mu}$
Растяжения	$x'^{\mu} = \lambda x^{\mu}$	$D = -ix^{\mu}\partial_{\mu}$
Вращения	$x'^{\mu} = M^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$	$L_{\mu\nu} = i\left(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu}\right)$
SCT	$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - (x\cdot x)b^{\mu}}{1-2(b\cdot x)+(b\cdot b)(x\cdot x)}$	$K_{\mu} = -i(2x_{\mu}x^{\nu}\partial_{\nu} - (x\cdot x)\partial_{\mu})$

Конформный фактор соотвествующий SCT:

$$\Omega^2 = (1 - 2(b\cdot x) + (b\cdot b)(x\cdot x))^2\,.$$

10. Генерация решений

Для того чтобы получить новое решение из затравочного (f_0, ϕ_0, χ_0) необходимо получить представление решения в координатах $x^{\mu} = (x, y, z)$ с помощью (43), подействовать конечным конформным преобразованием из таблицы $x^{\mu} \to x'^{\mu}$, и перейти обратно к потенциалам сигма модели обратным преобразованием (8).

Попробуем связать найденные векторы Киллинга $K_7 - K_{10}$ в (42) с конечными преобразованиями плоского пространства. Понятно, что они не будут изменять вид метрики (41), потому они годятся для любых решений теории, а не только экстремальных.

- $K_9 = \partial_\chi$ соответвует трансляциям по оси Oz. Потенциалы при трансляции по оси z на величину λ запишутся с использованием (8)

$$\begin{aligned} f' &= f\,, \\ \phi' &= \phi\,, \\ \chi' &= z' = z + \lambda = \chi + \lambda\,. \end{aligned} \tag{45}$$

Тут всё тривиально так как χ и z связаны простым равенством, то сдвиги по оси z эквивалентны добавлению к χ константы.

- $K_{10} = \frac{1}{2}\partial_\phi$ соответсвует вращению относительно оси Oz. Вращение относительно оси Oz на угол 2θ запишется так:

$$\begin{aligned} x' &= f\cos\big(2(\phi+\theta)\big)\,, \\ y' &= f\sin\big(2(\phi+\theta)\big)\,, \\ z' &= z\,. \end{aligned}$$

Это действительно соответсвует калибровочному преобразованию ϕ

$$\begin{aligned} f' &= f\,, \\ \phi' &= \phi + \theta\,, \\ \chi' &= \chi\,. \end{aligned} \tag{46}$$

- $K_8 = 2f\partial_f + 2\chi\partial_\chi$, из таблицы конечных преобразований ясно, что это соответсвует одновременному умножению f и χ на константу. Запишем растяжение координат в h раз:

$$x' = hx, \qquad y' = hy, \qquad z' = hz\,.$$

Это дает очевидное преобразование:

$$\begin{aligned} f' &= h\sqrt{x^2+y^2} = hf\,, \\ \phi' &= \operatorname{arctg}\left(\frac{hy}{hx}\right) = \phi\,, \\ \chi' &= h\chi\,. \end{aligned} \tag{47}$$

- $K_7 = 2\chi f\partial_f + \left(\chi^2 - f^2\right)\partial_\chi$, это нетривиальный случай он соответствует специальному конформному преобразованию вдоль вектора параллельного оси Oz. Обозначим длину этого вектора за d. Из таблицы видно, какими должны быть конечные преобразования:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{1 - 2d\chi + d^2(x^2+y^2+z^2)}\,, \\ y' &= \frac{y}{1 - 2d\chi + d^2(x^2+y^2+z^2)}\,, \end{aligned}$$

$$z' = \frac{z - d(x^2 + y^2 + z^2)}{1 - 2d\chi + d^2(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Тогда преобразованные потенциалы примут вид:

$$f' = \frac{f}{1 - 2d\chi + d^2(\chi^2 + f^2)},$$

$$\phi' = \phi, \tag{48}$$

$$\chi' = \frac{\chi - d(\chi^2 + f^2)}{1 - 2d\chi + d^2(\chi^2 + f^2)}.$$

Это преобразование никак не затрагивает дилатон, оно действует только в подпространстве (f, χ). Непосредственная проверка показывает, что такое преобразование не изменяет вида метрики (41).

Теперь рассмотрим преобразование, которое не соответствует ни одному из векторов Киллинга. Как мы увидим далее, такие преобразования хотя и переводят нулевые геодезические в такие же, но они всё же не могут быть использованы для генерации решений из-за ограничений на афинный параметр σ. Например посмотрим, к чему приведет вращение вокруг оси Ox на угол β:

$$x' = x,$$

$$y' = y\cos(\beta) - z\sin(\beta),$$

$$z' = y\sin(\beta) + z\cos(\beta).$$

Подставив (43) в предыдущие выражения получим преобразования потенциалов:

$$f' = \sqrt{f^2\cos^2(2\phi) + \left(f\sin(2\phi)\cos(\beta) - \chi\sin(\beta)\right)^2},$$

$$\phi' = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{f\sin(2\phi)\cos(\beta) - \chi\sin(\beta)}{f\cos(2\phi)}\right),$$

$$\chi' = f\sin(2\phi)\sin(\beta) + \chi\cos(\beta).$$

Так как это простое движение в координатах (x, y, z), то ему будет соответвовать конформный фактор $\Omega^2 = (2f'^2/2f^2) = (f'/f)^2$. Он принимает довольно сложный вид и вооще говоря не является потояной величиной. Чтобы восстановить вид уравнений геодезических, нужно будет перейти к новому аффиному параметру μ. Для этого нужно разрешить уравнение (37). Но не стоит забывать, что на аффиный параметр существуют ограничения, заложенные в уравнениях движения первоначальной теории (26). Основным требованием является гармоничность нового аффиного параметра, это условие должно выполняться так как геодезическая осталась нулевой, а следовательно и метрика h_{ij} плоской согласно (28) и это значит что лапласиан в трехмерии не изменился.

$$\Delta\mu = 0,$$

$$\Delta\mu = h^{ij}\nabla_i\left(\frac{d\mu}{d\sigma}\nabla_j\sigma\right) = h^{ij}\nabla_i\left(\Omega^{-2}\nabla_j\sigma\right),$$

$$= -2\Omega^{-3}\frac{d\Omega}{d\sigma}h^{ij}\nabla_i\sigma\nabla_j\sigma + \Omega^{-2}\Delta\sigma\,,$$

$$= -2\Omega^{-3}\frac{d\Omega}{d\sigma}(\nabla\sigma)^2\,.$$

Обычно для плоского пространтва выбирают $\sigma = 1/r$, чтобы у потенциалов были нужные асимптотики. Тогда единственный осмысленный способ обнулить это выражение - положить Ω постоянной величиной. Такими преобразованиями будут только соответствующие “чистым” векторам Киллинга.

Теперь после того как прояснилось какие преобразования стоит рассматривать попробуем применить одно из них на уже известное решение. Для этого выйдем из евклидового сектора заменой $\chi \to i\chi$. Тогда метрика примет вид

$$dl^2 = \frac{df^2}{2f^2} - \frac{d\chi^2}{2f^2} + 2d\phi^2\,,$$

и сами преобразования также изменят свой вид:

$$f' = \frac{f}{1+2d\chi - d^2(f^2-\chi^2)}\,,$$

$$\phi' = \phi\,, \tag{49}$$

$$\chi' = \frac{\chi - d(f^2-\chi^2)}{1+2d\chi - d^2(f^2-\chi^2)}\,.$$

В секторе с лоренцевой сигнатурой существуют экстремальные решения (инстантоны). Можно подействовать и на неэкстремальные решения изменив метрику $h_i j$, но мы ограничимся простым случаем. Возьмем экстремальное решение из работы [19]:

$$f_0 = (1+2M\sigma)^{-1}\,,$$

$$\phi_0 = 0\,,$$

$$\chi_0 = (f-1)\,.$$

Подействовав на него преобразованием (49), получим:

$$f_1 = \frac{1}{(d-1)\,(2M\sigma(d-1)-d-1)}\,,$$

$$\phi_1 = 0\,,$$

$$\chi_1 = \frac{2M(d-1)\sigma - d}{(d-1)\,(2M\sigma(d-1)-l-1)}\,,$$

где d - произвольная константа.

11. Замечания о критических значениях α

При особых значениях α алгебра векторов Киллинга расширяется до полупростой [8]. Исследуем общие конформные симметрии такой системы. Рассмотрим метрику пространсва потенциалов для системы Эйнштеина-Максвелла положив в (24) $\alpha = 0, \quad \phi = \mathrm{const}$:

$$g_{ab} d\varphi^a d\varphi^b = \frac{1}{2f^2}\left(df^2 + (d\chi + v da - a dv)^2\right) - \frac{1}{f}(dv^2 + da^2). \tag{50}$$

Она четырехмерна, а в четырехмерных пространствах конформно инвариантен тензор Баха, в нашем случае имеем:

$$R_{ab} = -3g_{ab}\,,$$
$$R = -12\,,$$
$$C_{abc} = 0\,,$$
$$B_{ab} = 0\,.$$

Таким образом пространство потенциалов теории Эйнштейна-Максвелла является простанством Эйнштейна. Для таких пространств тензор Коттона обращается в нуль, а так как он равен дивергенции тензора Вейля, то тензор Вейля является гармоническим. Таким же свойством обладает и теория Калуцы-Клейна, отвечающая $\alpha = \sqrt{3}$. Прямой расчет тензора Вейля показывает, что это пространство не является конформно плоским. Так как тензор Баха обращается в нуль, то единственной нетривиальной величиной инвриантной относительно конформных преобразований остаётся тензор Вейля.

12. Заключение

В работе были рассмотрены конформные симметрии пространства потенциалов сигма-модели ЭМД. Было произведено интегрирование уравнений конформных векторов Киллинга и построена алгебра конформных симметрий. Получены инварианты изотропных геодезических пространства потенциалов. Выявлено что некоторые его попространства являются конформно плоскими. Исследована возможность применения симметрий конформно плоских пространств к генерации новых решений в рассматриваемой системе. Единственным преобразованием представляющим интерес является специальное конформное преобразование (48) действующее нетривиально на потенциалы модели.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, а также при поддержке РФФИ в рамках проекта 14-02-01092a.

Литература

1. Kramer D. Exact solutions of Einstein's field equations / D. Kramer, M. MacCallum, E. Herlt. - Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1980. - 425 p.

2. Buchdahl H.A. Reciprocal static solutions of the equations $G_{\mu\nu} = 0$ / H.A. Buchdahl // Quart. J. Math. Oxford. - 1954. - Vol. 5. - P. 116.

3. Ehlers J. Konstruktionen und Charakterisierung von Lösungen der Einsteinschen Gravitationsfeldgleichunge / J. Ehlers // Dissertation, Hamburg. - 1957.

4. Neugebauer G. Eine methode zur konstruktion station?arer Einstein-Maxwell-Felder / G. Neugebauer, D. Kramer // Ann. der Phys. (Leipzig). - 1969. - Vol. 24. - P. 62-71.

5. Ernst F.J. New formulation of the axially symmetric gravitational field problem / F.J. Ernst // Phys. Rev. - 1968. - Vol. 167. - P. 1175.

6. Geroch R. A method for generating new solutions of Einstein's field equation I / R.Geroch // J. Math. Phys. - 1971. - Vol. 12. - P. 918-924.

7. Maison D. Ehlers-Harrison type transformations for Jordan's extended theory of gravitation / D. Maison // Gen. Rel. Grav. - 1979. - Vol. 10. - P. 717.

8. Gal'tsov D.V. Symmetries of the stationary Einstein-Maxwell dilaton theory / D.V. Gal'tsov, A.A. García, O. V. Kechkin // Class. Quant. Grav. - 1995. - Vol. 12. P. 2887. - Access mode:[hep-th/9504155].

9. Gal'tsov D.V. Ehlers-Harrison-Type Transformations in Dilation-Axion Gravity / D.V. Gal'tsov, O.V. Kechkin // Phys. Rev. D. - 1994. - Vol. 50. - P. 7394. - Access mode: [arXiv:hep-th/9407155];

10. Gal'tsov D.V. Integrable Systems in Stringy Gravity / D.V. Gal'tsov // Phys. Rev. Lett. - 1995. - Vol. 74. - P. 2863. - Access mode: [arXiv:hep-th/9410217]

11. Clément G. Stationary BPS solutions to dilaton-axion gravity / G. Clément, D. Gal'tsov // Phys. Rev. D. - 1996. - Vol. 54. - P. 6136. - Access mode: [arXiv:hep-th/9607043]

12. Gal'tsov D.V. Ehlers-Harrison transformations and black holes in dilaton-axion gravity with multiple vector fields / D.V. Gal'tsov, P.S. Letelier // Phys. Rev. D. - 1997. - Vol. 55. P.3580. - Access mode:[arXiv:gr-qc/9612007].

13. D. V. Gal'tsov and S. A. Sharakin Matrix Ernst potentials for EMDA with multiple vector fields // D.V. Gal'tsov, S.A. Sharakin // Phys. Lett. B. - 1997. - Vol. 399. - P. 250 - Access mode: [arXiv:hep-th/9702039].

14. Chen C.M. SL(4,R) generating symmetry in five-dimensional gravity coupled to dilaton and three-form / C.M. Chen, D.V. Gal'tsov, K. Maeda, S.A. Sharakin // Phys. Lett. - 1999.- Vol. B 453, No 7. P. 7-16.

15. Breitenlohner P. Solutions of the Einstein's Equations: Techniques and Results / P. Breitenlohner, D. Maison // ed. by C. Hoenselaers, W. Dietz, Lecture Notes in Physics. - 1984. - Vol. 205. P. 276

16. Maison D. Duality and hidden symmetries in gravitational theories / D. Maison // Lect. Notes Phys. - 2000. - Vol. 540. - P. 273-323.

17. Israel W. Solutions of the Einstein-Maxwell equations with many black holes / W. Israel, G.A. Wilson // Journ. Math. Phys. - 1972. - Vol. 13. - P. 865.

18. Bonnor W. An exact solution of the Einstein-Maxwell equations referring to a magnetic dipole / W. Bonnor // Z. Phys.- 1966. - Vol. 190. - P. 444.

19. M. Azreg-Aínou All extremal instantons in Einstein-Maxwell-dilaton-axion theory / M. Azreg-Aínou, G. Clément, D. V. Gal'tsov // Phys. Rev. D - 2011. - Vol. 84. - P. 104042. - Access mode: [arXiv:1107.5746].

HIDDEN SYMMETRIES OF THE EINSTEIN EQUATIONS AND CONFORMAL TRANSFORMATIONS OF TARGET SPACE

D.V. Gal'tsov, D.I. Alferov

Hidden symmetries are global symmetries that arise in dimensional reduction of Einstein's equations (and their generalizations) that inherited from the group of diffeomorphisms of the original theory.

In three-dimensional reduction all non-gravitational field are effectively reduced to scalar, with the broad classes of theories describe three-dimensional gravity, which has as a source a system of scalar fields, forming a nonlinear sigma-model. Hidden symmetries are used for obtaining new solutions of Einstein's equations depending on three variables (almost all nowadays analytically known solutions can be reduced to such a class). The "potential" space (target space) of the three-dimensional sigma-models obtained by reduction theory allowing solutions with a flat three-dimensional space (in models of supergravity this solution, saturating Bogomol'nyi–Prasad–Sommerfield bound (BPS)) has a metric of Lorentz signature, and contain isotropic geodesic. In particular, they correspond to extreme black holes with degenerate event horizon, and form an important sub-class of exact solutions. Since isotropic curves remain so under conformal transformations of the metric, there the question of usefulness of possible conformal symmetries of space the potential for the generation of BPS solutions. This work is attempt such a study. It is shown that some well-known sigma-models arising from the dimensional reduction, have conformally flat target space.
Keywords: general relativity, sigma-models, supergravity, Einstein equations.

УДК 530.12+523.112

ВРЕМЕННЫЕ ЭФФЕКТЫ КОЛЛАПСА ВОЛНОВОГО ПАКЕТА В СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ УИЛЕРА

А.К. Гуц[1]

1 *aguts@mail.ru*; Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Описана квантовая процедура переходов между различными историческими эпохами, отстоящими друг от друга в физическом космологическом времени. Механизм перехода может быть назван негёделевской машиной времени.

Ключевые слова: Коллапс волнового пакета, суперпространство Уилера, стационарное пространство-время, негёделевская машина временини.

Аппарат квантовой геометродинамики Уилера [1] описывает не только эффекты квантовой гравитации, но и является способом квантового описания Вселенной. В статье мы обращаем внимание на возможность с помощью этого аппарата выявить наличие возможных переходов между различными временными сечениями (эпохами) пространства-времени.

Пространство-время Вселенной M^4 в квантовой космологии Уилера-ДеВитта появляется как интерференция когерентной квантовой суперпозиции, или волнового пакета:

$$\Psi[{}^{(4)}\mathcal{G}] = \int_K c_k \Psi_k[{}^{(3)}\mathcal{G}]\,dk, \quad c_i \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

где $\Psi_k[{}^{(3)}\mathcal{G}]$ - частная волновая функция, являющаяся функционалом от 3-мерной римановой геометрии ${}^{(3)}\mathcal{G} = (M^3, h_{\alpha\beta})$ и удовлетворяющая функциональному уравнению Уилера-ДеВитта.

Мы видим, что то, что считается Реальностью, существующей в *форме* четырехмерного непрерывного континуума M^4 и называемого пространством-временем, в действительности является квантовой сущностью, т. е. цепью интерференционных